Lernmatrix de Steinbuch: Condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta

F. A. Sánchez-Garfias, J. L. Díaz-de-León-S. & C. Yáñez-Márquez
Centro de Investigación en Computación
del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este artículo se presenta una manera alternativa de expresar las fases de aprendizaje y recuperación de patrones para la *Lernmatrix*, modelo de memoria asociativa creado y descrito por Karl Steinbuch en 1961, en uno de los trabajos que se han convertido en pioneros en esta área, y que constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas. Además se presentan los resultados de un estudio sistemático que se realizó, por primera vez en la historia de la *Lernmatrix*, con el propósito de evidenciar las condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta de patrones.

Los resultados obtenidos permiten colocar a la *Lernmatrix*, después cuatro décadas de haber surgido, como una buena alternativa para clasificación y reconocimiento de patrones.

1. Introducción.

Las memorias asociativas han merecido la atención de numerosos investigadores internacionales desde hace más de cuatro décadas. Uno de los pioneros fue el científico alemán Karl Steinbuch quien, a principios de la década de los sesenta, ideó, desarrolló y aplicó la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961).

La *Lernmatrix* constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas, y constituye uno de los primeros intentos exitosos de codificar información en arreglos cuadriculados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990).

Una memoria asociativa tiene como propósito fundamental: recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado.

El problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)

2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

En ambas fases, una *memoria asociativa* M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbf{y}$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por $\mathbf{x}$ y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por $\mathbf{y}$. Cada uno de los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ del esquema forman la asociación $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Dado un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa M se representa mediante una matriz cuya componente ij-ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz M se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$$

Definición 1.1 *A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama patrones fundamentales.*

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas (Kohonen,1972).

Definición 1.2 *Si se cumple que* $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, *se dice que la memoria es autoasociativa; de otro modo, la memoria es heteroasociativa. Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente:* $\exists \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ *para el que se cumple que* $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Definición 1.3 *Si al presentarle a la memoria* M *un patrón alterado* $\widetilde{\mathbf{x}}^\omega$ *como entrada* ($\omega \in \{1, 2, ..., p\}$), M *responde con el correspondiente patrón fundamental de salida* $\mathbf{y}^\omega$, *se dice que la recuperación es perfecta.*

Definición 1.4 *Una memoria perfecta es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.*

A y B son dos conjuntos que cumplen con lo siguiente: las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, son elementos del conjunto A, y las entradas de la matriz M son elementos del conjunto B.

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A, y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$\mathbf{x}^{\mu} \in A^{n} \text{ y } \mathbf{y}^{\mu} \in A^{m} \; \forall \mu \in \{1,2,...,p\}$$

La j-ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1,2,...,n\}$ o $j \in \{1,2,...,m\}$ según corresponda). La j-ésima componente de un vector columna $\mathbf{x}^{\mu}$ se representa por

$$x_j^{\mu}$$

Los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida son, respectivamente:

$$\mathbf{x}^{\mu} = \begin{pmatrix} x_1^{\mu} \\ x_2^{\mu} \\ \vdots \\ x_n^{\mu} \end{pmatrix} \in A^{n} \qquad \mathbf{y}^{\mu} = \begin{pmatrix} y_1^{\mu} \\ y_2^{\mu} \\ \vdots \\ y_m^{\mu} \end{pmatrix} \in A^{m}$$

No obstante que Steinbuch presentó la *Lernmatrix* hace más de cuatro décadas, ningún investigador, incluyendo al propio Steinbuch, se ha dado a la tarea de estudiar con rigor científico las condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta del conjunto fundamental y de patrones que no pertenezcan a éste. En este trabajo se presenta, **por primera vez**, un estudio sistemático de esta naturaleza.

2. El trabajo de Steinbuch.

La *Lernmatrix* es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida; es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario $\mathbf{x}^{\mu} \in A^{n}$, $A = \{0,1\}$ y produce como salida la clase $\mathbf{y}^{\mu} \in A^{m}$ que le corresponde (de entre m clases diferentes), codificada ésta con un método simple, a saber: para representar la clase $k \in \{1,2,...,m\}$, se asignan a las componentes del vector de salida $\mathbf{y}^{\mu}$ los siguientes valores: $y_k^{\mu} = 1$, y $y_j^{\mu} = 0$ para $j = 1,2...,k-1,k+1,...m$

En la tabla se esquematiza la fase de aprendizaje para la *Lernmatrix* Steinbuch, con la pareja de patrones fundamentales $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \in A^n \times A^m$.

	x_1^μ	x_2^μ	$\cdots$	x_j^μ	$\cdots$	x_n^μ
y_1^μ	m_{11}	m_{12}	$\cdots$	m_{1j}	$\cdots$	m_{1n}
y_2^μ	m_{21}	m_{22}	$\cdots$	m_{2j}	$\cdots$	m_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_i^μ	m_{i1}	m_{i2}	$\cdots$	m_{ij}	$\cdots$	m_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_m^μ	m_{m1}	m_{m2}	$\cdots$	m_{mj}	$\cdots$	m_{mn}

Cada uno de los componentes m_{ij} de $\mathbf{M}$, la *Lernmatrix* de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla $m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ -\varepsilon \text{ si } y_i^\mu = 1 \text{ y } x_j^\mu = 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $\mathbf{x}^\omega \in A^n$ dado. Encontrar la clase significa obtener coordenadas del vector $\mathbf{y}^\omega \in A^m$ que le corresponde al patrón $\mathbf{x}^\omega$; en virtud del método de construcción de los vectores $\mathbf{y}^\mu$ la clase debería obtenerse ambigüedad.

La i-ésima coordenada y_i^ω del vector de clase $\mathbf{y}^\omega \in A^m$ se obtiene como indica la siguiente expresión, donde $\bigvee$ es el operador *máximo*:

$$y_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^n m_{ij}.x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^m \left[\sum_{j=1}^n m_{hj}.x_j^\omega\right] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}.$$

3. Caracterización alterna de las fases de aprendizaje y recuperación

En esta sección definiremos una función que nos permita desarrollar forma alterna de caracterizar las fases de aprendizaje y recuperación.

Definición 3.1 *Sean* $A = \{0, 1\}$ *y* $C = \{-1, 1\}$. *Llamaremos función de Steinbuch a una función* $f : A \to C$ *que cumpla con la siguiente propiedad:*

$$f(0) = -1$$
$$f(1) = 1$$

Claramente, existe un número infinito de funciones de Steinbuch, algunas las cuales se ejemplifican a continuación:

Ejemplo 3.1 $f(x) = \begin{cases} -1, \; si\; x = 0 \\ 1, \; si\; x = 1 \end{cases}$

Ejemplo 3.2 $f(x) = 2x - 1$

Ejemplo 3.3 $f(x) = -(-1)^x$

Una vez definida una función de Steinbuch f, podemos reescribir la expresión 2 de la siguiente forma:

$$\Delta m_{ij} = \varepsilon y_i^\mu f(x_j^\mu) \tag{5}$$

La tabla muestra que la expresión 5 es equivalente a la 2

y_i^μ	x_j^μ	$f(x_j^\mu)$	Δm_{ij}
1	1	1	$+\varepsilon$
1	0	-1	$-\varepsilon$
0	1	1	0
0	0	-1	0

Para lograr caracterizar la regla de aprendizaje de la Lernmatrix 5 en forma matricial, se requiere la siguiente definición.

Definición 3.2 *Sean $A = \{0,1\}$ y $C = \{-1,1\}$ y sea $f : A \to C$ una función de Steinbuch. Llamaremos función vectorial de Steinbuch con respecto a f a una función $\mathbf{F} : A^n \to C^n$, tal que:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Ahora, sea $\Delta\mathrm{M}$ es una matriz cuya componente ij-ésima es Δm_{ij}, y $\mathbf{F}$ una función vectorial de Steinbuch con respecto a f.

$$\Delta\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \Delta m_{11} & \Delta m_{12} & \dots & \Delta m_{1j} & \dots & \Delta m_{1n} \\ \Delta m_{21} & \Delta m_{22} & \dots & \Delta m_{2j} & \dots & \Delta m_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \Delta m_{i1} & \Delta m_{i2} & \dots & \Delta m_{ij} & \dots & \Delta m_{in} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \Delta m_{m1} & \Delta m_{m2} & \dots & \Delta m_{mj} & \dots & \Delta m_{mn} \end{pmatrix}$$

Al usar la expresión 5 en la matriz anterior, se tiene:

$$\Delta\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon y_1^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_1^\mu f(x_2^\mu) & \dots & \varepsilon y_1^\mu f(x_j^\mu) & \dots & \varepsilon y_1^\mu f(x_n^\mu) \\ \varepsilon y_2^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_1^\mu f(x_2^\mu) & \dots & \varepsilon y_2^\mu f(x_j^\mu) & \dots & \varepsilon y_2^\mu f(x_n^\mu) \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \varepsilon y_i^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_i^\mu f(x_2^\mu) & \dots & \varepsilon y_i^\mu f(x_j^\mu) & \dots & \varepsilon y_i^\mu f(x_n^\mu) \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \varepsilon y_m^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_m^\mu f(x_2^\mu) & \dots & \varepsilon y_m^\mu f(x_j^\mu) & \dots & \varepsilon y_m^\mu f(x_n^\mu) \end{pmatrix}$$

Factorizando ε:

$$\Delta \mathrm{M} = \varepsilon \begin{pmatrix} y_1^\mu f(x_1^\mu) & y_1^\mu f(x_2^\mu) & \dots & y_1^\mu f(x_j^\mu) & \dots & y_1^\mu f(x_n^\mu) \\ y_2^\mu f(x_1^\mu) & y_1^\mu f(x_2^\mu) & \dots & y_2^\mu f(x_j^\mu) & \dots & y_2^\mu f(x_n^\mu) \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ y_i^\mu f(x_1^\mu) & y_i^\mu f(x_2^\mu) & \dots & y_i^\mu f(x_j^\mu) & \dots & y_i^\mu f(x_n^\mu) \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ y_m^\mu f(x_1^\mu) & y_m^\mu f(x_2^\mu) & \dots & y_m^\mu f(x_j^\mu) & \dots & y_m^\mu f(x_n^\mu) \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\Delta \mathrm{M} = \varepsilon \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \dots \\ y_i^\mu \\ \dots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(x_1^\mu) & f(x_2^\mu) & \dots & f(x_j^\mu) & \dots & f(x_n^\mu) \end{pmatrix}$$

de donde se concluye que:

$$\Delta \mathrm{M} = \varepsilon \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\mu))^T$$

Finalmente, y tomando en cuenta que para formar la Lernmatrix se suma todas las $\Delta \mathrm{M}$ para cada valor de μ, podemos, formular las fases de aprendiza y de recuperación con base en la nueva caracterización que proponemos.

Fase de Aprendizaje de la LernMatrix

Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ un conjunto fundamental y $\mathbf{F}$ una funció vectorial de Steinbuch con respecto a f. La Lernmatrix M para el conjunt fundamental se construye de acuerdo con la siguiente regla:

$$\mathrm{M} = \varepsilon \sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\mu))^T$$

Fase de recuperación de la LernMatrix

Sea M una Lernmatrix y $\mathbf{x}^\omega$ un patrón de dimensión n. El patrón $\tilde{\mathbf{y}}^\omega$ perado a partir de $\mathbf{x}^\omega$ y M se determina de la siguiente forma:

$$\mathbf{z}^\omega = \mathrm{M} \cdot \mathbf{x}^\omega$$

$$\tilde{y}_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } z_i^\omega = \bigvee_{h=1}^{m} z_h^\omega \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Donde $\widetilde{\mathbf{y}}^{\omega}$ no es necesariamente igual a $\mathbf{y}^{\omega}$. En particular, si $\widetilde{\mathbf{y}}^{\omega} = \mathbf{y}^{\omega}$, entonces la recuperación es perfecta, de acuerdo con la definición 1.3.

4. Condiciones para recuperación perfecta

Con las expresiones 7 y 8, hemos caracterizado, en forma matricial, las reglas de aprendizaje y de recuperación de la Lernmatrix. Echando mano de esta caracterización y algunas definiciones adicionales, iniciaremos la investigación de las condiciones necesarias y suficientes para que la Lernmatrix recupere todo su conjunto fundamental de manera perfecta, de acuerdo con la definición 1.3.

Definición 4.1 *Sea $A = \{0,1\}$ y sean $\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{x}^{\beta} \in A^n$ dos patrones. Se dice que $\mathbf{x}^{\alpha}$ es igual que $\mathbf{x}^{\beta}$ (simbolizado $\mathbf{x}^{\alpha} = \mathbf{x}^{\beta}$) si y sólo si $\forall i \in \{1,2,..,n\}$ se cumple que $x_i^{\beta} = x_i^{\alpha}$.*

Definición 4.2 *Sea $A = \{0,1\}$ y sean $\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{x}^{\beta} \in A^n$ dos patrones. Se dice que $\mathbf{x}^{\alpha}$ es menor o igual que $\mathbf{x}^{\beta}$ (simbolizado $\mathbf{x}^{\alpha} \leq \mathbf{x}^{\beta}$) si y sólo si $\forall i \in \{1,2,..,n\}$ se cumple que $x_i^{\beta} = 1$ siempre que $x_i^{\alpha} = 1$.*

Ejemplo 4.1 *Sean* $\mathbf{x}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{x}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *entonces $\mathbf{x}^{\alpha} \leq \mathbf{x}^{\beta}$, ya que $\forall i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ se cumple que $x_i^{\beta} = 1$ cada vez que $x_i^{\alpha} = 1$*

Ejemplo 4.2 *Sean* $\mathbf{x}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{x}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *entonces es falso que $\mathbf{x}^{\alpha} \leq \mathbf{x}^{\beta}$, porque $x_1^{\alpha} = 1$ y $x_1^{\beta} = 0$.*

Después de haber descrito las herramientas necesarias, se presentan un lema, un teorema y un corolario, los cuales forman la parte central del presente trabajo.

Lema 4.1 *Sea M una Lernmatrix, entonces no es posible recuperar de manera perfecta el patrón $\mathbf{x} = 0$, donde 0 es el vector con ceros en todas sus entradas, es decir, que $x_i = 0\ \forall i \in \{1,2,..,n\}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{M}$ una Lernmatrix y sea $\mathbf{x}$ un patrón de dimension n tal que $x_i = 0\ \forall i \in \{1,2,..,n\}$.

Para la fase de recuperación, se necesita primero calcular el vector $\mathbf{z} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$. Puesto que $x_i = 0\ \forall i \in \{1,2,..,n\}$, entonces $z_i = 0\ \forall i \in \{1,2,..,m\}$. Luego, entonces, $\bigvee_{h=1}^{m} [z_h] = 0$, de aqui que $y_i = 1\ \forall i \in \{1,2,..,m\}$.Dado que todos los $\mathbf{y}^{\mu}$ del conjunto fundamental se crearon de forma que $y_{\mu}^{\mu} = 1$ y $y_{\alpha}^{\mu} = 0\ \forall \alpha \neq \mu$, el vector recuperado $\mathbf{y}$ no coincide con ningún $\mathbf{y}^\mu$, por tanto, $\mathbf{x}$ no puede recuperado de manera perfecta y el lema queda demostrado. ■

La importancia del lema anterior radica en que, sin importar las características del conjunto fundamental, el patrón $\mathbf{0}$ nunca podrá ser parte de una Lernmatrix, tanto como parte de su conjunto fundamental, como en el caso de sea un patrón alterado de otro fundamental.

El siguiente teorema, y el corolario que se desprende a partir de él, muestran las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los vectores del conjunto fundamental para que la recuperación sea perfecta, de acuerdo la definición 1.3.

Teorema 4.2 *Sea* M *una Lernmatrix y sea* $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ *el conjunto fundamental de* M. *Es posible recuperar de manera perfecta el conjunto fundamental de* M *si y sólo si* $\forall\ \alpha, \beta \in \{1, 2, .., m\}$ *y* $\alpha \neq \beta$, *la proposición* $\leq \mathbf{x}^\beta$ *es falsa.*

Demostración. Caso 1: $\exists\ \alpha \in \{1, 2, .., m\}$ tal que $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{0}$.

Claramente, se cumple que $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta\ \forall \beta \in \{1, 2, .., m\}$ y por ello la proposición $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$ es verdadera al menos para un caso. Por otro lado, por lema 4.1 se afirma que el patrón $\mathbf{x}^\alpha$ no se recupera de manera perfecta; es decir, es posible recuperar el conjunto fundamental de manera perfecta. Con ello teorema queda demostrado.

Caso2: $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{0}\ \forall \mu \in \{1, 2, .., m\}$.

Supongamos que $\forall\ \alpha, \beta \in \{1, 2, .., m\}$ y $\alpha \neq \beta$ la proposición $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$ falsa. De acuerdo con la expresión 7 para la fase de aprendizaje y considerando un valor $\alpha \in \{1, 2, .., m\}$ cualquiera, la matriz M se construye como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \varepsilon \sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\mu))^T \\
\mathrm{M} &= \varepsilon \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^1))^T + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\alpha))^T + \right. \\
&\qquad \left. \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^m))^T \right] \\
\mathrm{M} &= \varepsilon \begin{pmatrix} f(x_1^1) & f(x_2^1) & \ldots & f(x_j^1) & \ldots & f(x_n^1) \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ f(x_1^\alpha) & f(x_2^\alpha) & \ldots & f(x_j^\alpha) & \ldots & f(x_n^\alpha) \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ f(x_1^m) & f(x_2^m) & \ldots & f(x_j^m) & \ldots & f(x_n^m) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora, si queremos recuperar el patrón $\mathbf{y}^\alpha$ que corresponde a la salida del patrón $\mathbf{x}^\alpha$, tenemos que calcular el vector $\mathbf{z}^\alpha$ aplicando la expresión 8 que corresponde a la primera parte de la fase de recuperación:

$$\mathbf{z}^\alpha = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\alpha$$

Aplicando la expresión 9 en la expresión anterior, se tiene:

$$\mathbf{z}^\alpha = \varepsilon \begin{pmatrix} f(x_1^1) & f(x_2^1) & \ldots & f(x_j^1) & \ldots & f(x_n^1) \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ f(x_1^\alpha) & f(x_2^\alpha) & \ldots & f(x_j^\alpha) & \ldots & f(x_n^\alpha) \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ f(x_1^m) & f(x_2^m) & \ldots & f(x_j^m) & \ldots & f(x_n^m) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}^\alpha$$

Es decir:

$$\mathbf{z}^\alpha = \varepsilon \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^1) x_j^\alpha \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha) x_j^\alpha \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j^m) x_j^\alpha \end{pmatrix} \tag{10}$$

Esto significa que para algún valor $k \in \{1, 2, .., m\}$, la componente k-ésima de $\mathbf{z}^\alpha$ se expresa así:

$$z_k^\alpha = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f(x_j^k) x_j^\alpha \tag{11}$$

Específicamente las componentes α-ésima y β-ésima, con $\beta \in \{1, 2, .., m\}$ un valor cualquiera tal que $\alpha \neq \beta$, se expresan de la siguiente manera:

$$z_\alpha^\alpha = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha) x_j^\alpha \quad \text{y} \quad z_\beta^\alpha = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\beta) x_j^\alpha \tag{12}$$

Siguiendo con la expresión 8, de acuerdo con la segunda parte donde se obtienen las coordenadas $\tilde{y}_i^\omega$ y considando la manera en que se forma cada uno de los $\mathbf{y}^\mu$ del conjunto fundamental, podemos inferir que la condición en la expresión 10 para que se recupere el patrón $\mathbf{y}^\alpha$ de manera perfecta es que

$$z_\alpha^\alpha > z_\beta^\alpha \tag{13}$$

La desigualdad es estricta porque debe haber sólo un máximo para recuperación perfecta del patrón $\mathbf{y}^\alpha$, según la expresión 8.

Aplicando la expresión 12 en 13 se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha)x_j^\alpha &> \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\beta)x_j^\alpha \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha)x_j^\alpha - \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\beta)x_j^\alpha &> 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Definamos ahora el conjunto $T = \{j \mid x_j^\alpha = 1\}$, donde llamaremos t a cardinalidad de T, y tomando en cuenta que no influyen en la suma los términos donde $x_j^\alpha = 0$, la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} \sum_{j\in T} f(x_j^\alpha) - \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) &> 0 \\ t - \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) &> 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Luego, es claro que $-t \leq \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) \leq t$, ya que, de acuerdo con la definición 4, sucede que $f(x_j^\beta) = 1$ ó $f(x_j^\beta) = -1$ y además existen t términos en sumatoria.

Por otro lado, $\sum_{j\in T} f(x_j^\beta) \neq t$, como se muestra a continuacion. Supongamos que: $\sum_{j\in T} f(x_j^\beta) = t$, entonces:

$$\begin{aligned} & f(x_j^\beta) = 1 \ \forall j \in T \\ & x_j^\beta = 1 \ \forall j \in T \\ & x_j^\beta = 1 \ \forall j \text{ tal que } x_j^\alpha = 1 \\ & \mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta \text{ contradicción.} \end{aligned}$$

Por tanto, $-t \leq \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) < t$ y la desigualdad 15 siempre se cumple si sólo si la recuperación de $\mathbf{y}^\alpha$ es perfecta.

Finalmente, en virtud de que α y β se escogieron de manera arbitraria, podemos concluir que es posible recuperar de manera perfecta el el conjunto fundamental de M si y sólo si $\forall\ \alpha, \beta \in \{1, 2, .., m\}$ y $\alpha \neq \beta$, la proposición $\leq \mathbf{x}^\beta$ es falsa. ■

Corolario 4.2.1 *Sea* M *una Lernmatrix y sea* $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ *conjunto fundamental de* M, *con* $\mathbf{x}^\mu \neq 0\ \forall \mu \in \{1, 2, .., p\}$. *Si* $\exists\ \alpha \in \{1, 2, .., p\}$ *de modo que* $\mathbf{x}^\alpha \in \{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ *con* $x_i^\alpha = 1\ \forall i \in \{1, 2, .., n\}$, *entonces no es posible recuperar de manera perfecta el conjunto fundamental de* M.

Demostración. Dado que $\mathbf{x}^\alpha$ es un patrón del conjunto fundamental M cuyas entradas son sólo unos, es decir $x_i^\alpha = 1\ \forall i \in \{1, 2, .., n\}$, entonces $\mathbf{x}^\mu \leq \mathbf{x}^\alpha$, $\forall \mu \in \{1, 2, .., p\}$ y $\mu \neq \alpha$, de acuerdo con la definición 4.2. Dado que existen $\alpha, \mu \in \{1, 2, .., p\}$ tales que $\mu \neq \alpha$ y $\mathbf{x}^{\mu} \leq \mathbf{x}^{\alpha}$, al aplicar el teorema 4.2 se demuestra de manera inmediata que no es posible recuperar de manera perfecta todo el conjunto fundamental de la Lernmatrix $\mathbf{M}$. ■

5. Conclusiones y trabajo futuro.

En el presente trabajo se ha planteado una forma alternativa de representar la Lernmatrix de Steinbuch, así como las demostraciones de un lema, un teorema y un corolario que describen las condiciones necesarias y suficientes para que la Lernmatrix de Steinbuch recupere de manera perfecta todo su conjunto fundamental.

Es preciso enfatizar que este tipo de estudio se ha realizado en este artículo por primera vez, desde la aparición de la *Lernmatrix* en 1961.

La relevancia de los resultados presentados en este artículo nos permite afirmar que este trabajo abre caminos claros para quienes se interesen en realizar investigaciones futuras sobre el tema, a saber:

- investigar algunas otras propiedades que pueda exhibir esta memoria asociativa
- las condiciones de respuesta ante ruido aditivo y sustractivo
- las condiciones bajo las cuales se da la saturación al tener varios patrones que formen parte de una misma clase
- la posible creación de una nueva versión de la Lernmatrix, élla que no sólo trabaje sobre patrones binarios, sino en el dominio de los números enteros, o más aún, en los reales.

Los resultados de estas investigaciones podrían dar paso a la creación de nuevas memorias asociativas que podrían facilitar la resolución de algunos tipos de problemas, principalmente en el área de la clasificación de patrones.

6. Agradecimientos.

Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFAA y Secretaría Académica del IPN, CONACyT y Sistema Nacional de Investigadores.

Referencias

[1] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics, 26*, 175-185.

[2] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Fundations of Research*, Cambridge: MIT Press.

[3] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.

[4] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks (11)*, 5, 869-876.

[5] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA'99, México, D.F.*, 23-38.

[6] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.

[7] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions Computers, C-21, 4*, 353-359.

[8] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

[9] Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.

[10] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik, 1, 1*, 36-45.

[11] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik, 1, 3*, 117-124.

[12] Yáñez-Márquez , C. (2002). *Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios.* Tesis doctoral, CIC-IPN, México.

[13] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Lernmatrix Steinbuch*, IT-48, Serie Verde, ISBN 970-18-6688-6, CIC-IPN, México.